Kolokwium nr 1 z **analizy matematycznej I.2**

7 kwietnia 2021, 14:30 – 17:50

Rozwiązanie każdego zadania **należy** umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.
Zadania są równo punktowane.

---

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba $a \geqslant 1$, że funkcja zadana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$
jest różniczkowalna.

---

2. (a) Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej y równanie
$$3x^5 - 10x^3 + 15x = y$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie x.

   (b) Wyznaczyć wszystkie punkty $y \in \mathbb{R}$, w których funkcja $g(y)$ przyporządkowująca liczbie rzeczywistej y rozwiązanie x powyższego równania jest różniczkowalna. Wyznaczyć $g'(0)$ (jeśli istnieje).

---

3. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in (0, \pi/2)$ spełniona jest nierówność
$$|\ln(2 - \sin x) - \ln(2 - \sin y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} |x - y| \, .$$

---

4. (a) Wyznaczyć wielomian Taylora trzeciego stopnia w $x_0 = 0$ (wielomian Maclaurina) dla funkcji
$$f(x) = e^{-\operatorname{arc\,tg} x}.$$

   (b) Obliczyć granicę
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{\exp(-\operatorname{arc\,tg}\, x) - \frac{1}{1+x} + \frac{x^2}{2}}.$$

---

5. Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

---

6. Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie trzykrotnie różniczkowalna. Załóżmy ponadto, że spełnione są warunki:

   - $f(0) = f(2) = 0, f(1) < 0$,
   - dla wszystkich $x \in [0, +\infty)$ zachodzi nierówność $f'''(x) > 0$.

   Wykazać, że $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.